Chapitre 12

Suites réelles et complexes

Plan du chapitre

1 Généralités sur les suites

1.1 Introduction

Définition 12.1

On appelle suite réelle toute application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Elle est généralement notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites réelles. L'expression u_n est appelée le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque. On peut aussi définir des suites $u : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, ou plus généralement des suites $u : [\![n_0, +\infty[\![\to \mathbb{R}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$. On notera alors $(u_n)_{n\geq n_0}$.

On peut définir une suite réelle de plusieurs façons :

- *Explicite* : $(n^2-1)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$
- *Par récurrence* :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- *Implicite* : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note x_n l'unique solution de l'équation $\ln x + x = n$. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque (Suites bien définies)**.** Pour qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie, il faut s'assurer que pour chaque valeur de n, l'expression de u_n a un sens et est unique. Voici des suites ***mal définies*** :

$$(\ln(10-n))_{n\in\mathbb{N}}$$

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{\pi}{2} \\ u_{n+1} = \tan(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$x_n \text{ est l'unique solution de } x^2 = 1-n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

1.2 Opérations sur les suites

Définition 12.2

Étant donné deux suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit :

- La suite $u+v$ comme étant la suite de terme général $u_n + v_n$.
- La suite uv comme étant la suite de terme général $u_n v_n$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite λu comme étant la suite de terme général λu_n.

Définition 12.3

On définit une relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par

$$u \leq v \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n$$

Cet ordre est partiel.

1.3 Majorations, minorations

Définition 12.4

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une propriété $\mathcal{P}$ <u>à partir d'un certain rang</u> lorsqu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(u_n)_{n\geq N}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Définition 12.5

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite...

1. constante *si* $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n$
2. stationnaire si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang, càd si

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad u_n = C$$

3. majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$
4. minorée si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$
5. bornée si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois majorée et minorée.
6. positive si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 0$
7. négative si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 0$

Exemple 1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_n = 2$ pour tout $n \geq 2$ est stationnaire mais pas constante.

Exemple 2. La suite de terme général $(-1)^n$ est bornée mais pas stationnaire.

Propriété 12.6

Pour toute suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} &\iff (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée} \\ &\iff \ldots \end{aligned}$$

Remarque. On peut remplacer le "$\exists K \in \mathbb{R}$" par "$\exists K \geq 0$" ou même "$\exists K \geq 100$" : si la proposition est vraie pour une valeur K_0, alors elle l'est aussi pour la valeur $K_0 + 100$.

1.4 Sens de variation

Définition 12.7 (Sens de variation)

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite...

1. croissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$
2. décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$
3. monotone si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ou décroissante.
4. strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > u_n$
5. strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$
6. strictement monotone si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante ou strictement décroissante.

Il arrive que ces propriétés ne soient vérifiées qu'à partir d'un certain rang.

Toute suite croissante et décroissante est une suite constante.

Méthode (Étudier la monotonie)

Étant donnée une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Si on a une définition explicite $u_n = F(n)$, on peut étudier la monotonie de F sur $\mathbb{R}_+$ (qui contient $\mathbb{N}$) pour en déduire celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Enfin, il y a aussi des variantes “décroissantes” et/ou “strictes” : si $u_{n+1} - u_n < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante, etc.

Exemple 3. Étudier la monotonie de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exemple 4. Étudier la monotonie de la suite de terme général $u_n = \dbinom{2n}{n}$.

Exemple 5. Si $a > 0$, la suite de terme général a^n est strictement croissante si $a > 1$, strictement décroissante si $a < 1$.

Quelques résultats évidents :

- Par récurrence immédiate, si (u_n) est croissante, alors pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$, on a $u_p \leq u_q$.
- Si u est une suite croissante, $-u$ est décroissante.
- Si u, v sont des suites croissantes, alors $u + v$ aussi.
- Si u, v sont des suites croissantes *positives*, alors uv aussi.

2 Limite d'une suite

2.1 Limite finie – suite convergente

Définition 12.8

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Étant donné $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ ou converge vers ℓ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

   Un tel réel ℓ est alors appelé limite de la suite u, on note

$$\lim u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \to \ell$$

2. On dit que (u_n) est convergente lorsqu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que (u_n) converge vers ℓ.
3. On dit que (u_n) est divergente lorsque (u_n) n'est pas convergente.

S'il y a un risque de confusion, on peut employer la notation plus précise $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots$ ou $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ldots$

$u_n \to \ell$ signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$ à partir d'un certain rang N (qui dépend de ε). Autrement dit, à partir d'un certain rang, la suite se retrouve "coincée" dans la bande horizontale $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$

Théorème 12.9 (Unicité de la limite (finie))

Soit $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $\quad u_n \to \ell_1 \quad$ et $\quad u_n \to \ell_2 \quad$ alors $\quad \ell_1 = \ell_2$.
Autrement dit, *la* limite de la suite (u_n) est unique.

Démonstration.

□

Méthode

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$u_n \to \ell \iff u_n - \ell \to 0 \iff |u_n - \ell| \to 0$$

Ainsi, si on veut montrer que $u_n \to \ell$, il suffit de majorer $|u_n - \ell|$ par une expression v_n telle que

$$|u_n - \ell| \leq v_n \qquad v_n \to 0$$

Exemple 6. Montrer que la suite de terme général $u_n = \dfrac{n^2+1}{n^2}$ tend vers 1.

Propriété 12.10

Pour tous $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, si $u_n \to \ell$, alors $|u_n| \to |\ell|$.

Démonstration. Par la seconde inégalité triangulaire :

$$\Big| |u_n| - |\ell| \Big| \leq |u_n - \ell| \to 0 \qquad\qquad \text{donc } |u_n| \to |\ell|$$

□

Propriété 12.11

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration.

□

Remarque. Quelques remarques sur la notion de convergence :

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente lorsque $\quad \exists \ell \in \mathbb{R} \quad u_n \to \ell$.
- Toute suite stationnaire est convergente. La réciproque est fausse : $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0 sans être stationnaire.
- Attention ! Pour que (u_n) soit **convergente**, il faut qu'elle admette une **limite finie**.

2.2 Limite infinie

Définition 12.12 (Limites infinies)

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ lorsque, pour tout réel A, la suite u est majorée par A à partir d'un certain rang :
$$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad u_n \leq A$$
On note alors $\lim u_n = -\infty$ ou encore $u_n \to -\infty$.
2. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ lorsque, pour tout réel A, la suite u est minorée par B à partir d'un certain rang :
$$\forall B \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad u_n \geq B$$
On note alors $\lim u_n = +\infty$ ou encore $u_n \to +\infty$.

Exemple 7. La suite de terme général $u_n = n$ tend vers $+\infty$. En effet, pour tout $B \in \mathbb{R}$, on pose $N = \lfloor B \rfloor + 1 \in \mathbb{N}$, et alors pour tout $n \geq N$ on a
$$u_n = n \geq N > B$$

Remarque (Nature d'une suite)**.** Quand on demande la nature d'une suite, on entend par là prouver si elle est convergente ou divergente. Trois cas sont possibles :

- La suite (u_n) tend vers une limite finie, càd est *convergente*.
- Sinon, la suite (u_n) est *divergente* :
  - Ou bien (u_n) a une limite infinie.
  - Ou bien (u_n) n'a pas de limite, par exemple $u_n = (-1)^n$ ou $u_n = (-2)^n$.

Exemple 8 (**Essentiel**)**.** Soit $q \in \mathbb{R}$. Donner la nature de la suite (q^n).

Propriété 12.13 (Unicité de la limite (finie ou non))

Si une suite admet une limite (finie ou infinie), cette limite est unique.

2.3 Opérations sur les limites

Somme et produit

Propriété 12.14 (Limite de la somme et du produit)

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites telles que

$$u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad v_n \to \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$$

Alors, **à condition que cela ne donne pas une forme indéterminée**,

$$u_n + v_n \to \ell + \ell'$$

$$u_n v_n \to \ell\ell'$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad \lambda u_n \to \lambda \ell$$

Rappel : les formes indéterminées sont :

$$+\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$0^0 \qquad 1^\infty \qquad \infty^0$$

Exemple 9. Montrer que la suite de terme général $u_n = n^2 - n$ tend vers $+\infty$.

Propriété 12.15

Soit $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $u_n \to 0$ et (v_n) est bornée, alors $u_n v_n \to 0$.

Démonstration.

□

Inverse et quotient

On peut montrer que si

$$v_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$$

alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \neq 0$ si $n \geq N$. Ainsi, la suite $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n \geq N}$ est bien définie.

Propriété 12.16 (Limite de l'inverse)

Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. Si $v_n \to \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $\dfrac{1}{v_n} \to \dfrac{1}{\ell}$.
2. Si $v_n \to \pm\infty$, alors $\dfrac{1}{v_n} \to 0$.
3. Si $v_n \to 0$ et $v_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{v_n} \to +\infty$.
4. Si $v_n \to 0$ et $v_n < 0$ à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{v_n} \to -\infty$.
5. Si $v_n \to 0$ et $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, mais que les cas 3 et 4 ne sont pas vérifiés, alors $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ n'a pas de limite.

Exemple 10. La suite de terme général $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ vérifie $v_n \to 0$ mais $\dfrac{1}{v_n} = n(-1)^n$ n'a pas de limite.

Remarque (Limite du quotient)**.** Si $u_n \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $v_n \to \ell' \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{0\}$, alors à condition qu'on n'ait pas de forme indéterminée,

$$\frac{u_n}{v_n} \to \frac{\ell}{\ell'}$$

Attention toutefois au cas $v_n \to 0$... Par exemple si $u_n = 1$ et $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \to 0$, alors $\dfrac{1}{0}$ n'est pas une forme indéterminée, mais pour autant $\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{1}{v_n}$ n'admet pas de limite.

Pour être sûr de ne pas se tromper, on peut aussi réécrire $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$ et appliquer les Propositions 12.14 et 12.16.

Exemple 11. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{n + \sin n}{3n - \cos n}$.

2.4 Limites et inégalités

Passage à la limite

Propriété 12.17 (Passage à la limite)

Soit u, v deux suites *convergentes* vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors $\lim u_n \leq \lim v_n$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\lim u_n > \lim v_n$. Alors $\lim(u_n - v_n) > 0$. Cela entraine que $u_n - v_n > 0$ à partir d'un certain rang, ce qui contredit l'hypothèse $u_n \leq v_n$. Donc $\lim u_n \leq \lim v_n$. □

Remarque. Une inégalité stricte $u_n < v_n$ devient une inégalité large en passant à la limite : $\lim u_n \leq \lim v_n$. Penser à $u_n = 0$ et $v_n = \dfrac{1}{n}$.

Remarque. Attention, pour passer à la limite dans $u_n \leq v_n$, il faut que $\lim u_n$ **et** $\lim v_n$ aient un sens !

Résultats d'existences de limites

Théorème 12.18 (Théorème d'encadrement)

Soit u, w deux suites convergeant vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Soit v une suite telle que

$$u_n \leq v_n \leq w_n \qquad \text{à partir d'un certain rang}$$

alors (v_n) est convergente et $v_n \to \ell$.

Démonstration.

□

Le principal intérêt de ce théorème est de montrer que (v_n) est convergente ! En effet, si on sait déjà que (v_n) est convergente, la Proposition 12.17 suffit pour conclure que $v_n \to \ell$.

Propriété 12.19

Soit u, v deux suites vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.
- Si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.

Démonstration. Évident d'après la définition d'une limite infinie. □

Ce résultat est lui aussi un théorème d'existence de limite. Attention au sens : si $u_n \leq v_n$ et que $\lim u_n = -\infty$, on ne peut rien dire sur (v_n) : a priori, on ne sait même pas si sa limite existe.

3 Sens de variation et limites

3.1 Suites monotones

Théorème 12.20 (Théorème de la limite monotone)

Soit (u_n) une suite croissante.

1. Si (u_n) est majorée, elle est convergente et $\lim u_n = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si (u_n) est non majorée, elle est divergente et $\lim u_n = +\infty$.

Soit (u_n) une suite décroissante.

1. Si (u_n) est minorée, elle est convergente et $\lim u_n = \inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
2. Si (u_n) est non minorée, elle est divergente et $\lim u_n = -\infty$.

Autrement dit, toute suite monotone admet une limite (éventuellement infinie).

Démonstration.

□

Exemple 12. Déterminer la nature de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Si (u_n) est une suite croissante et majorée par M, on sait que $\lim u_n \leq M$: il suffit d'appliquer la Proposition 12.17 avec $v_n = M$. En particulier, l'exemple ci-dessus montre que $\lim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2$.

Enfin, si une suite croissante (u_n) tend vers ℓ, alors pour tout n on a $u_n \leq \ell$.

3.2 Suites adjacentes

Définition 12.21 (Suites adjacentes)

Deux suites sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si leur différence tend vers 0.

Théorème 12.22 (Théorème des suites adjacentes)

Si deux suites sont adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante, (v_n) une suite décroissante telles que $\lim(u_n - v_n) = 0$. Alors la suite $(u_n - v_n)$ est croissante et tend vers 0, si bien que pour tout n, on a $u_n - v_n \leq 0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$$

- La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0 donc est convergente.
- La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 donc est convergente.

Comme $\lim(u_n - v_n) = 0$, on en déduit que $\lim u_n - \lim v_n = 0$, ou encore $\lim u_n = \lim v_n$. □

En reprenant les notations de la preuve, si $\ell = \lim u_n = \lim v_n$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leq \ell \leq v_n$$

et même

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \qquad u_p \leq \ell \leq v_q$$

Exemple 13. Étudier la nature des suites définies pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n!}$$

4 Extraction de suites

4.1 Suites extraites

Définition 12.23 (Suite extraite)

1. On appelle extractrice toute application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.
2. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Une suite (v_n) est appelée suite extraite de (u_n) ou sous-suite de (u_n) s'il existe une extractrice φ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n = u_{\varphi(n)}$$

Propriété 12.24

Si φ est une extractrice, on a $\varphi(n) \geq n$.

Exemple 14. Les suites (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{n+1}) sont toutes des suites extraites de (u_n).

Intuitivement, une suite extraite (v_n) s'obtient en "retirant" une partie des termes de la suite (u_n), ce qui décale les indices, de sorte que $v_n = u_{\varphi(n)} \neq u_n$ a priori.

Définition 12.25 (Valeur d'adhérence)

On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est valeur d'adhérence d'une suite (u_n) s'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ telle que $u_{\varphi(n)} \to \ell$.

Exemple 15. Si $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = (-1)^n$, alors 1 et -1 sont des valeurs d'adhérences car

$$u_{2n} = 1 \to 1 \qquad u_{2n+1} = -1 \to -1$$

Propriété 12.26

Soit (u_n) une suite qui tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ tend vers ℓ.

En particulier, si (u_n) admet deux valeurs d'adhérences distinctes, alors (u_n) n'a pas de limite.

La deuxième assertion découle de la première en raisonnant par l'absurde : si (u_n) admettait une limite, toutes ses sous-suites convergeraient vers cette même limite. Or, on a deux valeurs d'adhérences distinctes, donc il existe deux sous-suites qui convergent vers des limites distinctes. Contradiction.

Exemple 16. Montrer que la suite définie par $u_n = \cos(n\pi)$ diverge.

4.2 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 12.27

On appelle segment de $\mathbb{R}$ tout intervalle fermé borné, càd tout intervalle de la forme $[a,b]$ avec $a,b \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$.

Théorème 12.28 (Théorème des segments emboités)

Soit $I_n = [a_n, b_n]$ une suite de segments tels que $I_{n+1} \subset I_n$. On suppose que la largeur $(b_n - a_n)$ de I_n vérifie $(b_n - a_n) \to 0$.
Alors l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.

Démonstration. Comme $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, on a

$$a_n \leq a_{n+1} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} \leq b_n$$

Ainsi, (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et $b_n - a_n \to 0$. Ce sont des suites adjacentes, et donc il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \to \ell$ et $b_n \to \ell$.
Comme ce sont des suites adjacentes, on a

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq \ell \leq b_n \\ \iff & \forall n \in \mathbb{N} \quad \ell \in I_n \\ \iff & \ell \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \end{aligned}$$

Ceci montre que $\{\ell\} \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Réciproquement, montrons que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset \{\ell\}$. Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Grâce aux équivalences ci-dessus, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq x \leq b_n$$

et passant à la limite, on trouve $\ell \leq x \leq \ell$, donc $x = \ell$. Ainsi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \subset \{\ell\}$. Finalement

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{\ell\}$$

□

Théorème 12.29 (Théorème de Bolzano–Weierestrass)

Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

Démonstration.

$\square$

Exemple 17. La suite $(\sin n)$ possède au moins une sous-suite convergente.

5 Compléments

5.1 Suites complexes

Généralités

Définition 12.30

On appelle suite complexe toute application $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On note là encore $u_n := u(n)$.

On peut à nouveau définir la somme et le produit de suites complexes, cf Définition 12.2.

Comme, la relation $\leq$ n'a pas de sens sur $\mathbb{C}$, les notions de suites majorées, minorées, et tout ce qui concerne le sens de variation n'a pas de sens pour les suites complexes. Cependant, la notion de suite bornée à un sens :

Définition 12.31

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La suite complexe (u_n) est dite bornée lorsque la suite réelle $(|u_n|)$ est majorée, càd

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |u_n| \leq K$$

Propriété 12.32

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Alors (u_n) est bornée si et seulement si les suites $(\mathrm{Re} u_n)$ et $(\mathrm{Im} u_n)$ sont bornées.

Limite d'une suite complexe

Pour les suites complexes, on ne définit pas la notion de limite infinie. Il y a donc uniquement les suites convergentes (limite finie) et les autres, qui sont divergentes.

Définition 12.33 (Convergence dans $\mathbb{C}$)

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) tend vers ℓ ou converge vers ℓ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

et on écrit $u_n \to \ell$ ou $\lim u_n = \ell$.

Comparé aux suites réelles, la valeur absolue est donc devenue un module. Beaucoup de résultats s'étendent au cas complexe en modifiant un peu les preuves :

Propriété 12.34

La limite éventuelle d'une suite complexe est unique.
Toute suite complexe convergente est bornée.
Pour tous $u, v \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} u_n \to \ell \\ v_n \to \ell' \end{cases} \implies \begin{cases} u_n + v_n \to \ell + \ell' & \\ \lambda u_n \to \lambda \ell & \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{C} \\ u_n v_n \to \ell \ell' & \\ \dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{\ell} & \text{si } \ell \neq 0 \text{ et } u_n \neq 0 \text{ à partir d'un certain rang} \end{cases}$$

Si (u_n) est bornée et $v_n \to 0$ alors $u_n v_n \to 0$.

Enfin, on a également cette caractérisation utile pour se ramener au cas réel :

Propriété 12.35

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $u_n \to \ell$
2. $\operatorname{Re} u_n \to \operatorname{Re} \ell$ et $\operatorname{Im} u_n \to \operatorname{Im} \ell$

Enfin, le théorème d'encadrement et la notion de suites adjacentes utilisent l'ordre $\leq$ et n'ont donc pas d'équivalent pour les suites complexes.

Suites extraites

Toutes les définitions et les théorèmes de la section 4.1 restent valides dans le cas complexe.

Remarque (Sous-sous-suite)**.** Étant donnée une suite u (réelle ou complexe) et deux extractrices φ, ψ :

$$(u_{\varphi(n)}) \quad \text{est une sous-suite de} \quad (u_n)$$

$$(u_{\varphi(\psi(n))}) \quad \text{est une sous-suite de} \quad (u_{\varphi(n)}) \quad \text{et donc de} \quad (u_n)$$

Par contre, $(u_{\psi(\varphi(n))})$ n'est en général pas une sous-suite de $(u_{\varphi(n)})$:

Exemple 18 (Contre-exemple)**.** Si $u_n = n$, $\varphi(n) = 2n$ et $\psi(n) = n+1$,

$$u_{\psi(\varphi(n))} = u_{2n+1} = 2n+1$$

n'est clairement pas une suite extraite de la suite $(u_{\varphi(n)}) = (u_{2n}) = (2n)$, car elles n'ont aucun terme en commun.

Théorème 12.36 (Bolzano-Weierstrass complexe)

Toute suite complexe bornée admet une sous-suite convergente.

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée par un réel $K \geq 0$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\operatorname{Re} u_n| \leq |u_n| \leq K$$

Donc la suite *réelle* $(\operatorname{Re} u_n)$ est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass réel, il existe une sous-suite $(\operatorname{Re} u_{\varphi(n)})$ qui converge vers $a \in \mathbb{R}$. Par ailleurs,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|\operatorname{Im} u_{\varphi(n)}\right| \leq |u_{\varphi(n)}| \leq K$$

donc la suite *réelle* $(\operatorname{Im} u_{\varphi(n)})$ est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass réel, on peut en extraire une sous-suite $(\operatorname{Im} u_{\varphi(\psi(n))})$ qui converge vers $b \in \mathbb{R}$, avec ψ une seconde extractrice.
On a donc $\operatorname{Im} u_{\varphi(\psi(n))} \to b$ et $\operatorname{Re} u_{\varphi(\psi(n))} \to a$ car c'est une suite extraite de $(\operatorname{Re} u_{\varphi(n)})$ qui converge vers a. Ainsi,

$$u_{\varphi(\psi(n))} \to a + ib \in \mathbb{C}$$

et donc on a bien trouvé une suite extraite qui converge. □

5.2 Limite de $f(u_n)$, caractérisations de la densité et du "sup"

Propriété 12.37 (Limite de $f(u_n)$)

Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $u : \mathbb{N} \to I$ une suite à valeurs dans I. On a

$$\begin{cases} u_n \to a \in \overline{\mathbb{R}} \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) = b \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases} \implies f(u_n) \to b$$

En particulier, si $a \in I$ et f est continue en a, alors $b = f(a)$ et donc $f(u_n) \to f(a)$.

Exemple 19. Si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $e^{u_n} \to e^{\ell}$.
Si $u_n \to 0$, alors $\ln(1 + u_n) \to 0$.

Propriété 12.38 (Caractérisation de la densité)

Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel x, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Exemple 20. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $r_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \to x$ et $r_n \in \mathbb{D}$ donc $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (idem pour $\mathbb{Q}$). Pour la preuve de $r_n \to x$, cf TD.

Propriété 12.39 (Caractérisation de la borne supérieure)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $s \in \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $s = \sup A$

(ii) s est un majorant de A et il existe une suite (x_m) d'éléments de A telle que $x_m \to s$.

6 Suites particulières

6.1 Suites récurrente linéaire d'ordre 1

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite (réelle ou complexe).

Suite arithmétique

Définition : $u_0 \in \mathbb{K}$ est donné et il existe raison $r \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r$$

Terme général : $u_n = u_0 + nr$
Somme des termes :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} \qquad\qquad \frac{\text{premier terme } + \text{dernier terme}}{2} \times \text{nombre de termes}$$

Suite géométrique

Définition : $u_0 \in \mathbb{K}$ est donné et il existe une raison $q \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = q u_n$$

Terme général : $u_n = q^n u_0$
Somme des termes :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \qquad\qquad \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Rappel : on a étudié la limite éventuelle de (q^n) : celle de $(u_n) = (u_0 q^n)$ s'en déduit facilement au cas par cas.

Suite arithmético-géométrique

Définition 12.40

On dit que (u_n) est une suite arithmético-géométrique s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que

$$u_{n+1} = a u_n + b$$

Pour calculer le terme général u_n, on applique la méthode suivante :

Méthode

Soit (u_n) arithmético-géométrique telle que $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$.

1. On cherche ω tel que $\omega = a\omega + b$. On trouve $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.
2. On écrit
$$\begin{cases} u_{n+1} & = au_n + b \\ \omega & = a\omega + b \end{cases} \implies (u_{n+1} - \omega) = a(u_n - \omega)$$
Ainsi, la suite $(u_n - \omega)$ est géométrique de raison a.
3. En tant que suite géométrique : $u_n - \omega = (u_0 - \omega) \times a^n$, donc
$$u_n = \omega + (u_0 - \omega) \times a^n$$

6.2 Suites récurrente linéaire d'ordre 2

Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite (réelle ou complexe).

Définition 12.41 (Suite récurrente linéaire d'ordre 2)

u est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$
On définit l'équation caractéristique associée
$$(C) : \qquad r^2 = ar + b$$

Pour qu'une telle suite soit bien définie, il faut aussi donner les valeurs de $u_0, u_1 \in \mathbb{K}$.

Propriété 12.42 (Résolution, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

- Si (C) admet deux racines distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$, alors il existe $A, B \in \mathbb{C}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$
- Si (C) admet une racine double $r \in \mathbb{C}$, alors il existe $A, B \in \mathbb{C}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = r^n (A + Bn)$$

Propriété 12.43 (Résolution, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

- Si (C) admet deux racines distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

- Si (C) admet une racine double $r \in \mathbb{R}$, alors il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = r^n (A + Bn)$$

- Si (C) n'a pas de racines réelles, les racines complexes sont, sous forme exponentielle, $r = \rho e^{i\theta}$ et $\overline{r}$. Alors, il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \rho^n (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$$

Démonstration. Plus tard, dans un chapitre qui n'a, semble-t-il, aucun rapport... Surprise ! □

Les valeurs u_0, u_1 données permettent de calculer les constantes A, B en regardant les formules pour $n = 0$ et $n = 1$.

Exemple 21. Calculer le terme général de la suite de Fibonacci (u_n), définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$

6.3 Suites récurrentes d'ordre 1, cas général

On se place dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On suppose que $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle non vide et non singleton. Enfin, on considère $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 12.44 (Suite récurrente d'ordre 1)

Une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite récurrente d'ordre 1 (associée à f) si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

Une telle suite (u_n) n'est pas nécessairement bien définie.

Définition 12.45

Soit $J \subset I$. On dit que J est stable par f si $f(J) \subset J$, càd

$$\forall x \in J \qquad f(x) \in J$$

Si un tel ensemble J existe, alors pour tout $a \in J$, la suite

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

est bien définie et $u_n \in J$.

Démonstration. Comme $f : J \to J$ est bien définie, on a par récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n \text{ fois}}(u_0)$$

est bien défini. □

Propriété 12.46

Soit $f : J \to J$ une fonction et $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $\begin{cases} u_0 \in J \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Si (u_n) converge vers $\ell \in J$ et f est continue en ℓ, alors

$$f(\ell) = \ell$$

Un réel ℓ qui vérifie $f(\ell) = \ell$ est dit un point fixe de f.

Démonstration. Comme $u_n \to \ell$ et que f est continue en ℓ, alors $f(u_n) \to f(\ell)$. De plus $u_{n+1} \to \ell$. Donc en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, on trouve

$$\ell = \lim u_{n+1} = \lim f(u_n) = f(\ell)$$

□

Méthode (Vous serez souvent très guidés ! !)

On souhaite étudier une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec u_0 donné.

1. Étudier f : trouver D_f et établir son tableau de variations (avec les bornes).
2. Résoudre l'équation $f(\ell) = \ell$. Placer chaque solution dans le tableau.
3. Identifier un ensemble J tel que

$$u_0 \in J \qquad J \text{ est stable par } f \qquad f \text{ est monotone sur } J$$

On a alors $u_n \in J$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Si f est décroissante sur J, vous serez guidés... Si f est croissante sur J, alors deux cas possibles :
   (a) Si $u_1 \geq u_0$, alors comme f est croissante, $u_{n+1} \geq u_n$ par récurrence immédiate.
   (b) Si $u_1 \leq u_0$, alors comme f est croissante, $u_{n+1} \leq u_n$ par récurrence immédiate.

La suite (u_n) est donc monotone. Supposons (u_n) croissante pour simplifier.

5. Plusieurs arguments peuvent conclure :
   (A) Si (u_n) est majorée (automatique si J est majoré), alors (u_n) converge vers un réel ℓ, qui doit vérifier

$$\ell \in J \qquad \ell = f(\ell) \qquad u_0 \leq \ell \qquad (\ell \leq u_0 \text{ si } (u_n) \text{ décroissante}) \qquad (E_\ell)$$

   Si on a bien choisi J, il n'y a qu'un seul réel ℓ_0 qui vérifie ces relations. Donc $\lim u_n = \ell_0$.

   (B) Si on peut choisir J de sorte qu'aucun réel ℓ ne vérifie les relations (E_ℓ), alors nécessairement (u_n) ne peut être convergente. Ainsi, $\lim u_n = +\infty$.

Exemple 22. Étudier la suite récurrente $u_{n+1} = \dfrac{1}{6}(u_n^2 + 8)$ avec $u_0 = 1$, puis avec $u_0 = 5$.